Qualifikationsphase Curriculum Mathematik, Teil Analysis, Stand: 19.10.2015,

Thema: *Analysis Q1-I – Optimierungsprobleme (Q*-GK-A1*)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Zentrale Kompetenzen: Modellieren Problemlösen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: Funktionen als mathematische Modelle Fortführung der Differentialrechnung **Zeitbedarf**: 9 / 20 Std. Die Schülerinnen und Schüler • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen • Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten • führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, **Produkt, Verkettung**) argumentativ auf deren Bestandteile zurück • **wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an, laut Lambacher Schweizer ein eigenes Kapitel,**	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen. An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben. An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht. Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „ schnellsten Weg “. Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine

nach den Exponential-Funktionen **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren) **Problemlösen** Die Schülerinnen und Schüler	anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung).

• finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (Erkunden) • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Verallgemeinern …) (Lösen) • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (Lösen) • berücksichtigen einschränkende Bedingungen (Lösen) • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen) • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (Reflektieren)	
Thema: *Analysis Q1-II – Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit* (ganzrationalen) *Funktionen (Q-*GK-*A2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Zentrale Kompetenzen: Modellieren Werkzeuge nutzen **Inhaltsfelder**: Funktionen und Analysis (A) Lineare Algebra (G)	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Anknüpfend an die Einführungsphase werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und

Inhaltliche Schwerpunkte: Funktionen als mathematische Modelle Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: 15 / *20* Std. Die Schülerinnen und Schüler • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)	Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Designobjekte oder architektonische Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Hier bieten sich nach einem einführenden Beispiel offene Unterrichtsformen (z. B. Lerntheke) an. Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.

• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)
• reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)
Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  ○ Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
  ○ zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
  ○ nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen	

Thema: *Analysis Q1-III – Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Zentrale Kompetenzen: Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** Grundverständnis des Integralbegriffs **Zeitbedarf**: 9 / 10 Std. **Inhaltsbezogene Kompetenzen:** Die Schülerinnen und Schüler • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Kommunizieren** Die Schülerinnen und Schüler • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (Rezipieren) • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (Produzieren)	Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden.

• wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus (Produzieren) • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren) • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (Produzieren) • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren)	

Thema: *Analysis Q1-IV – Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK-A4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Zentrale Kompetenzen: Argumentieren Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: Integralrechnung **Zeitbedarf**: 12 / *20* Std. Die Schülerinnen und Schüler • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und	Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema Q-GK-A3) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist. Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen

Integralfunktion • deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Argumentieren** Die Schülerinnen und Schüler • stellen Vermutungen auf (Vermuten) • unterstützen Vermutungen beispielgebunden (Vermuten) • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten) • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen) • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten (Begründen) • erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise	Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag). Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. (z. B. durch ein sog. Funktionendomino In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt. Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.

(Begründen) • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen) **Werkzeuge nutzen** Die Schülerinnen und Schüler • nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … o Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse o Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals	

Thema: *Analysis Q2*-V/*I* – Natürlich: Exponentialfunktionen *und Logarithmus (Q*-GK-*A5)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Zentrale Kompetenzen: Problemlösen Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** Fortführung der Differentialrechnung **Zeitbedarf**: 9 / 20 Std. Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und begründen die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze • interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: o natürliche Exponentialfunktionen o Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z. B. in Gruppenarbeit mit Präsentation stehen (Wachstum und Zerfall). Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder in der Grafik ihres GTR experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden. Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.

Prozessbezogene Kompetenzen:
 	
Problemlösen
 	
Die Schülerinnen und Schüler
 	
• erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden)
 	
• entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
 	
• nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme)(Lösen)
 	
• führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen)
 	
• variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (Reflektieren)
 	
Werkzeuge nutzen
 	
Die Schülerinnen und Schüler
 	
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
 	
  ○ zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
 	
  ○ grafischen Messen von Steigungen
 	
• entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
 	
• nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	

Thema: *Analysis Q2-VI/II – Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK-A6)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Zentrale Kompetenzen: Modellieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** Fortführung der Differentialrechnung Integralrechnung **Zeitbedarf**: 12 / 20 Std. Die Schülerinnen und Schüler • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: o Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) • wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an • wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und	Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion wird eine Kettenlinie modelliert. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.

numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)	

• reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren) **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)	

Ende Teil Analysis

Qualifikationsphase Curriculum Mathematik, Teil Lineare Algebra für Grundkurs, Stand: 19.10.2015

Thema: *Lineare Algebra/Analytische Geometrie Q1*-VII – *Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-GK-G1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler • stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender)	Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden. Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.

Modelle für die Fragestellung (Validieren)
• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)
Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• nutzen Geodreiecke […] geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software, wie z. B. Vektoris 3D oder Geogebra.
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  ○ grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden
  ○ Darstellen von Objekten im Raum	

Thema: *Lineare Algebra/Analytische Geometrie Q2*-VII – *Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q-GK-G2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler • stellen Ebenen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext	Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen. Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.

• stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Problemlösen** Die Schülerinnen und Schüler • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden) • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen) • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen (Lösen) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) (Lösen) • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen) • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (Reflektieren) • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (Reflektieren)	In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem. Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren. Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

• analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern (Reflektieren) **Werkzeuge nutzen** Die Schülerinnen und Schüler • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum o Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	

Thema: *Lineare Algebra/Analytische Geometrie Q2*-VIII – *Eine Sache der Logik und der Begriffe: Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-GK-G3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler • untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden, Gerade – Ebene und Ebene – Ebene. **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Argumentieren** Die Schülerinnen und Schüler • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)	Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z. B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen. Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache

• berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (Begründen) • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen) **Kommunizieren** Die Schülerinnen und Schüler • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (Rezipieren) • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (Produzieren) • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren) • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren) • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (Diskutieren)	angeregt werden. Eine analoge Bearbeitung der in Q-GK-G2 erarbeiteten Beziehungen zwischen Geraden und Ebenen bietet sich an. Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Q-GK-G1 wieder aufgegriffen werden. Dabei wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden. Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden (Q-GK-G4).

Thema: *Lineare Algebra/Analytische Geometrie Q2*-IX – *Räume vermessen – mit dem Skalarprodukt (Q-GK-G4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der

• deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) **Prozessbezogene Kompetenzen:** **Problemlösen** Die Schülerinnen und Schüler • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden) • analysieren und strukturieren die Problemsituation (Erkunden) • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) (Lösen) • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (Lösen) • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (Reflektieren)	Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt. Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden. Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit kann in Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, vgl. Q-GK-G3) entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden. Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen wieder aufgenommen werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.

Ende Teil Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Qualifikationsphase Curriculum Mathematik, Teil Stochastik für Grundkurs, Stand: 19.10.2015

Thema: *Stochastik Q2-X – Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen(Q2-GK-S1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeits-verteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Thema: *Stochastik Q2-XI – Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q2-GK-S2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente
• erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten
• beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung
• bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen […]
Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  ○ Generieren von Zufallszahlen
  ○ Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
  ○ Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
  ○ Variieren der Parameter von Binomialverteilungen
  ○ Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)
	Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.
	
	Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.
	
	Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an.
	
	Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR.
	
	Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet.
	
	Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von *n* und *p* ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen.
	
	Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.

Thema: *Stochastik Q2-XI –Modellieren mit Binomialverteilungen (Q2-GK-S3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen • schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren) **Argumentieren** Die Schülerinnen und Schüler • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen) • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten (Begründen)	In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt: - die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment - die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette - die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße - die Unabhängigkeit der Ergebnisse - die Benennung von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen. Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden. *Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.*

Thema: *Stochastik Q2-XII – Von Übergängen und Prozessen (Q2-GK-S4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) **Argumentieren: Die Schülerinnen und Schüler** • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen) • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen) • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)	*Hinweis:* *Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.

Ende Teil Stochastik

Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit

1. Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
2. Inhalt und Anforderungsniveau des Unterrichts entsprechen dem Leistungsvermögen der Schüler/innen.
3. Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Ziele und Inhalte abgestimmt.
4. Medien und Arbeitsmittel sind schülernah gewählt.
5. Die Schüler/innen erreichen einen Lernzuwachs.
6. Der Unterricht fördert eine aktive Teilnahme der Schüler/innen.
7. Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Schülern/innen und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
8. Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Schüler/innen.
9. Die Schüler/innen erhalten Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
10. Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Partner- bzw. Gruppenarbeit.
11. Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
12. Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
13. Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
14. Es herrscht ein positives pädagogisches Klima im Unterricht.
15. Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit Schülerinnen und Schülern.
16. Im Unterricht werden fehlerhafte Schülerbeiträge produktiv im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe aufgenommen.
17. Der Unterricht ermutigt die Lernenden dazu, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen.
18. Die Bereitschaft zu problemlösenden Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.
19. Die Einstiege in neue Themen erfolgen grundsätzlich mithilfe sinnstiftender Kontexte (außermathematisch und schülerorientiert), die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinter stehende Mathematik führt.

20. Es wird genügend Zeit während des Unterrichts eingeplant, in der sich die Lernenden neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können.
21. Durch regelmäßiges wiederholendes Üben werden grundlegende Fertigkeiten „wachgehalten“.
22. Im Unterricht werden an geeigneter Stelle differenzierende Aufgaben (z. B. mit Hilfekarten, Wahlaufgaben oder „Blütenaufgaben“) eingesetzt.
23. Die Lernenden werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.
24. Parallel zum Mathematikbuch werden in allen Kursen die fachliche Inhalte und Erkenntnisse bezüglich der Prozesse in systematischer Form gesichert (in der Fachmappe oder ggf. in einem gesonderten „Merkbuch“).
25. Der Unterricht erzieht die Schüler zu einer angemessenen Verwendung der Fachsprache.
26. Digitale Medien werden dort eingesetzt, wo sie dem Lernfortschritt der fachinhaltlichen und prozessorientierten Kompetenzen dienen.